Das Maxwellsche Feld und das Invariantensystem zweiter Ordnung im dreidimensionalen Riemannschen Raume positiv-definiter Metrik

M. BÖRNER *

(Z. Naturforsch. 24 a, 185—188 [1969]; eingegangen am 5. November 1968)

Es wird gezeigt, daß die div-Relationen des Maxwellschen Feldes im Vakuum Folgen der Struktur des Krümmungs- bzw. des Extensionstensors 4. Stufe im dreidimensionalen Riemannschen Raum mit positiv-definiter Metrik sind. Damit ist zusammen mit einer vorangehenden Arbeit [2] gezeigt, daß das gesamte Maxwellsche Feld im Vakuum eine Folge der Strukturmöglichkeiten des genannten metrischen Feldes ist, gekennzeichnet durch die lokale orthogonale Invariante $I_2^{(2)} \neq 0$. Es ergeben sich Einschränkungen für die Gültigkeit Lorentz-invarianter Gleichungen.

Darüber hinaus ist nunmehr erklärt, auf welche Weise der leere euklidische Raum, wie bei der Erledigung des Ätherproblems durch die spezielle Relativitätstheorie postuliert, zum Träger elektromagnetischer Felder wird.

1. Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit wurde gezeigt, daß eine vollständige Geometrisierung der physikalischen Welt als durchführbar erscheint [1]. Die Strukturen dieses Raumes sind durch orthogonale Invarianten einer Folge von Differentialformen gekennzeichnet [2]. Unter den einfachsten Formen wurde diejenige mit den Invarianten

$$I_1^{(2)} = \mathrm{Det}\,|G_{ij}| = 0\,, \tag{1}$$

$$I_2^{(2)} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} \\ G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{33} & G_{13} \\ G_{13} & G_{11} \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{2}$$

$$I_3^{(2)} = G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0\,, \tag{3}$$

$$I_l^{(P)} = 0 \quad \text{für} \quad p > 2\ (p \text{ gerade}) \tag{4}$$

als zum Maxwellschen Feld gehörig erkannt. Die zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen folgen aus dem Variationsproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2^{(2)}\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{5}$$

In dieser Arbeit sollen, wie in [2] angekündigt, die zeitunabhängigen beiden Gleichungen

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0 \tag{6}$$

und

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0 \tag{7}$$

auf Grund von differentialgeometrischen Überlegungen verifiziert werden.

* 7900 Ulm (Donau), Sylvanerweg 4.

[1] M. BÖRNER, Z. Naturforsch. 22 a, 1825 [1967].

[2] M. BÖRNER, Z. Naturforsch. 22 a, 1835 [1967].

2. Das Linienelement zur Ordnung $T = 4$

Zunächst korrigieren wir einige kleinere Fehler in der Arbeit [2] [Gln. (4), (7), (8); die Gln. (9), (13) entsprechend]. Das Linienelement schreibt sich in Normalkoordinaten [2, 3] zunächst wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = g_{ij}(0)\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j + [& -g_{23,23}\,\Delta y^{23}\,\Delta y^{23} \\ & - g_{31,31}\,\Delta y^{31}\,\Delta y^{31} - g_{12,12}\,\Delta y^{12}\,\Delta y^{12} \\ & + 2\,g_{23,31}\,\Delta y^{23}\,\Delta y^{31} + 2\,g_{31,12}\,\Delta y^{31}\,\Delta y^{12} \\ & + 2\,g_{12,23}\,\Delta y^{12}\,\Delta y^{23}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Ersetzt man nun orthogonal-invariant (ohne Raumspiegelung)

$$\Delta y^1 = \Delta^{23}, \quad \Delta y^2 = \Delta y^{31}, \quad \Delta y^3 = \Delta y^{12} \tag{9}$$

und

$$G_{11} = -g_{23,23}\,, \quad G_{22} = -g_{31,31}\,, \quad G_{33} = -g_{12,12}\,, \tag{10 a, b, c}$$

$$G_{12} = g_{23,31} = g_{31,23} = G_{21}\,, \tag{10 d}$$

$$G_{23} = g_{31,12} = g_{12,31} = G_{32}\,, \tag{10 e}$$

$$G_{31} = g_{12,23} = g_{23,12} = G_{13}\,, \tag{10 f}$$

so erhält man schließlich

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(0)\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j + G_{ij}\,\Delta y^i\,\Delta y^j\,. \tag{11}$$

Die zeitabhängigen (linearen) Maxwellschen Gleichungen folgen nun auf dem oben skizzierten Wege aus den Größen G_{ij}, wenn man annimmt, daß die G_{ij} das euklidische Feld

$$g_{ij}(0) = g\,\delta_{ij} \tag{12}$$

[3] O. VEBLEN u. T. Y. THOMAS, Trans. Am. Math. Soc. 25, 551 [1923].

nur schwach stören. Dann bestimmt nämlich die orthogonale Gruppe mit der Determinante $+1$ die Invarianten des Feldes, und eine bestimmte, nämlich $I_2^{(2)}$, liefert nach Gl. (5) die linearen Maxwellschen Gleichungen [2].

3. Die Beziehungen div $\mathfrak{E}=0$ und div $\mathfrak{H}=0$

Nach [2] hängen die Feldvektoren E_i und H_i mit den Größen G_{ij} zusammen:

$$G_{ij}=\tfrac{1}{2}\,(E_i\,H_j+E_j\,H_i)\,. \tag{13}$$

Die G_{ij} sind aber nach Gl. (10) in bestimmter Weise die Komponenten eines Tensors 4. Stufe, der sich nach Gl. (22) [1] aus den Komponenten des geläufigeren Krümmungstensors R_{ijkl} zusammensetzt:

$$G_{rs}\to g_{ij,\,K_1K_2}=\tfrac{1}{3}\,(R_{iK_1jK_2}+R_{jK_1iK_2})\,. \tag{14}$$

Für die G_{rs} bzw. $g_{ij,\,K_1K_2}$ hat man

$$\begin{aligned} g_{\ j,\,K_1K_2} = {} & \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^2 g_{iK_2}}{\partial x^{K_1}\,\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{K_1j}}{\partial x^i\,\partial x^{K_2}}+\frac{\partial^2 g_{jK_2}}{\partial x^{K_1}\,\partial x^i}+\frac{\partial^2 g_{K_1i}}{\partial x^j\,\partial x^{K_2}}-2\,\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^{K_1}\,\partial x^{K_2}}-2\,\frac{\partial^2 g_{K_1K_2}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right] \\ & +\frac{1}{12}\,g^{lm}\left[\left(\frac{\partial g_{K_1m}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^{K_1}}-\frac{\partial g_{K_1j}}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{K_2}}+\frac{\partial g_{K_2l}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{iK_2}}{\partial x^l}\right)\right. \\ & \qquad +\left(\frac{\partial g_{K_1m}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^{K_1}}-\frac{\partial g_{K_1i}}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{K_2}}+\frac{\partial g_{K_2l}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jK_2}}{\partial x^l}\right) \\ & \qquad \left.-2\left(\frac{\partial g_{K_1m}}{\partial x^{K_2}}+\frac{\partial g_{K_2m}}{\partial x^{K_1}}-\frac{\partial g_{K_1K_2}}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Nun hatten wir uns auf den fast euklidischen Fall [Gl. (12)] beschränkt, und damit hat man näherungsweise

$$g^{lm}=\frac{1}{g}\,\delta^{lm}\,. \tag{14}$$

Die Größe g soll groß gegen alle vorkommenden Felder sein. Dann verschwinden also auch die Produkte aus den ersten Ableitungen (nach affinen Koordinaten!). Explizit kann man dann für die Größen G_{rs} schreiben:

$$G_{11}=E_1\,H_1\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^3\,\partial x^3}+\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^2\,\partial x^2}-2\,\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^2\,\partial x^3}\right), \tag{15 a}$$

$$G_{22}=E_2\,H_2\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^1\,\partial x^1}+\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^3\,\partial x^3}-2\,\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^1\,\partial x^3}\right), \tag{15 b}$$

$$G_{33}=E_3\,H_3\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1}-2\,\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}\right), \tag{15 c}$$

$$G_{12}=\tfrac{1}{2}\,(E_1\,H_2+E_2\,H_1)\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^3\,\partial x^3}+\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^1\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^2\,\partial x^3}-\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^1\,\partial x^3}\right), \tag{15 d}$$

$$G_{23}=\tfrac{1}{2}\,(E_2\,H_3+E_3\,H_2)\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^1\,\partial x^1}+\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^3}-\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^3}-\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^1\,\partial x^2}\right), \tag{15 e}$$

$$G_{31}=\tfrac{1}{2}\,(E_3\,H_1+E_1\,H_3)\cong\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^3}-\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^1\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2\,\partial x^3}\right). \tag{15 f}$$

Nun wollen wir uns die Berechnung von div $\mathfrak{E}$ und div $\mathfrak{H}$ dadurch erleichtern, daß wir ein geeignetes Koordinatensystem aussuchen. Wegen Gl. (1) hat die charakteristische Gleichung zur Differentialform $G_{ij}\,\Delta y^i\,\Delta y^j$ eine Wurzel, die verschwindet. Wir wählen die Komponente

$$G^*_{33}=0 \tag{16}$$

als diese Wurzel aus und finden dann die Normalform für die Differentialform 2. Ordnung

$$F_2=G^*_{11}\,\Delta y^{*1}\,\Delta y^{*1}+G^*_{22}\,\Delta y^{*2}\,\Delta y^{*2}. \tag{17}$$

Es ist also auch

$$G^*_{13}=G^*_{12}=G^*_{23}=0\,. \tag{18}$$

Voraussetzung für diese Transformation ist, daß wieder wegen Gl. (12) die orthogonale Gruppe erlaubt ist (Determinante $+1$, volle Drehung). Da die Ausdrücke div $\mathfrak{E}$ und div $\mathfrak{H}$ invariant unter dieser Gruppe sind, ist das Verfahren gesichert.

Wegen Gl. (3) hat man noch

$$-G^*_{11} = G^*_{22}. \tag{19}$$

Nach einiger Rechnung erhält man

$$E_1 = +\sqrt{G^*_{11}}, \quad E_2 = -\sqrt{G^*_{11}}, \quad E_3 = 0; \quad (20\,\mathrm{a, b, c})$$

$$H_1 = +\sqrt{G^*_{11}}, \quad H_2 = +\sqrt{G^*_{11}}, \quad H_3 = 0. \quad (21\,\mathrm{a, b, c})$$

Dann wird weiter

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{E} &= \frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \sqrt{G^*_{11}}}{\partial x^1} - \frac{\partial \sqrt{G^*_{11}}}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{2\, G^{*1/2}_{11}} \left[\frac{\partial G^*_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial G^*_{11}}{\partial x^2}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathfrak{H} &= \frac{\partial H_1}{\partial x^1} + \frac{\partial H_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \sqrt{G^*_{11}}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sqrt{G^*_{11}}}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{2\, G^{*1/2}_{11}} \left[\frac{\partial G^*_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^*_{11}}{\partial x^2}\right].\end{aligned} \tag{23}$$

Sollen sowohl div $\mathfrak{E}$ als auch div $\mathfrak{H}$ verschwinden, so müssen das auch die Summen bzw. Differenzen beider Ausdrücke tun, es muß also sein

$$0 = \partial G^*_{11}/\partial x^1 \tag{24}$$

und $$0 = \partial G^*_{11}/\partial x^2 = -\partial G^*_{22}/\partial x^2. \tag{25}$$

Um das zu zeigen, bildet man mit Hilfe der Gl. (15) die Ausdrücke [vgl. Gl. (18)!]

$$0 = \partial G^*_{12}/\partial x^2 \tag{26}$$

und $$0 = \partial G^*_{13}/\partial x^3. \tag{27}$$

Addiert findet man

$$0 = \frac{\partial G^*_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial G^*_{13}}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial G^*_{11}}{\partial x^1}. \tag{28}$$

Genauso ergibt sich

$$0 = \frac{\partial G^*_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial G^*_{23}}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial G^*_{22}}{\partial x^2}. \tag{29}$$

Damit ist gezeigt, daß die Divergenz beider Teilfelder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ des Maxwellschen Feldes identisch verschwindet. Das Verschwinden ist eine Folge der speziellen Struktur des aus dem Krümmungstensor abgeleiteten Extensionstensors 4. Stufe g_{ij,K_1K_2} bei schwachen Störungen des euklidischen Raumes, der lokal erzeugt wird durch den Gesamtkosmos.

4. Folgerungen aus der Ableitung des gesamten Maxwellschen Feldes aus reiner Geometrie

Die im vorigen Abschnitt verifizierten Divergenzrelationen lassen zusamen mit den zeitabhängigen Maxwellschen Gleichungen [Gln. (44), (45) in [2]] bekanntlich eine Vierer-Schreibweise zu:

Die Gleichung $(\mu, \nu = 1, \ldots, 4)$

$$\partial F_{\nu\mu}/\partial x^\mu = 0 \tag{30}$$

mit $$x^4 = i\,c\,t \tag{31}$$

ist äquivalent zu $$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{E}} \tag{32}$$

und $$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \tag{33}$$

Die Gleichung $$\partial F^*_{\nu\mu}/\partial x^\mu = 0 \tag{34}$$

ist äquivalent zu $$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{H}} \tag{35}$$

und $$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{36}$$

F und F^* sind zueinander duale Feldtensoren:

$$F_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -i\,E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -i\,E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -i\,E_3 \\ i\,E_1 & i\,E_2 & i\,E_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$F^*_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -i\,E_3 & i\,E_2 & H_1 \\ i\,E_3 & 0 & -i\,E_1 & H_2 \\ -i\,E_2 & i\,E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Damit ist der Übergang zu einer Lorentz-invarianten Darstellung gewonnen. Es stellt sich sofort die Frage, wie grundlegend die Lorentz-Gruppe nach der Rückführung der Maxwellschen Gleichungen des Vakuums auf 3-dimensionale Strukturmannigfaltigkeiten überhaupt sein kann. Die bisherige Grundlage der Maxwellschen Theorie ist die reine Erfahrung. Die Grundlage unserer Theorie des metrischen Feldes geht tiefer. Dort sind überhaupt keine Voraussetzungen gemacht worden in Form von physikalischen Erfahrungen, also Gleichungen, Konstanten oder ähnlichem. Die Struktur unserer Gleichungen folgt aus rein differentialgeometrischen Überlegungen zur Riemannschen Geometrie positiv definiter Metrik. Sogar die Vorzugstellung des 3-dimensionalen Raumes ist eine Folgerung, keine Voraussetzung [1].

Daraus folgt, daß die Lorentz-Invarianz, die ja als bedeutend erkannt wurde an den Maxwellschen Gleichungen und den Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie, höchstens nur insoweit von allgemein-physikalischer Wichtigkeit sein kann, als die Bedingungen bei der Ableitung der Maxwellschen Gleichungen aus den tieferliegenden Gleichungen des metrischen Feldes eingehalten sind. Diese Bedingungen waren [2]:

1. Die Zeit ist kontinuisierbar, was heißt, daß Prozesse, die schneller als in etwa 10^{-20} sec ablaufen, nicht erfaßt werden.
2. Die Gesamtdauer der Prozesse kommt nicht in die Größenordnung kosmogonischer Prozesse.

Die Bedingung 1. macht es fraglich, ob Lorentz-invariante Gleichungen noch Prozesse beschreiben können, an denen Elementarteilchen-Resonanzen beteiligt sind. Die Bedingung 2. läßt die Anwendung Lorentz-invarianter Gleichungen in der Kosmogonie als zweifelhaft erscheinen.

On the Quantum Theory of the Anharmonic Oscillator in Functional Space

H. STUMPF

Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. **24 a**, 188—197 [1969]; received 17 October 1968)

Dynamics of quantum field theory can be formulated by functional equations. For strong interaction nonperturbative solutions of these functional equations are required. For the investigation of solution procedures the model of an anharmonic oscillator is used, because of its structural equivalence with dressed one- and two-particel states of field theory. To perform a variational solution procedure a scalar product for the state functionals is introduced and its existence is proven. The scalar product definition admits a mapping of the physical Hilbert space on the functional space. Therefore a "functional" quantum theory seems to be possible. The whole procedure can be transferred to relativistic invariant field theories, provided these theories are regularized to give finite results at all.

In quantum field theory especially in nonlinear spinor theory of elementary particles the dynamical behaviour of the physical systems can be described by functionals of field operators in a Heisenberg representation and corresponding functional equations [1–6]. To obtain the physical information in the strong coupling case, it is necessary to solve the functional equations without perturbation theory. As has been discussed in previous papers the anharmonic oscillator is a suitable test problem for the investigation of solution procedures of strong coupling functional equations [5, 6]. Therefore in the following this model will be treated. The general idea for the nonperturbative solution of the functional equations is the use of an expansion of the physical functionals into series of suitably chosen base functionals and to approximate the exact infinite series by series with a finite number of terms [7–11]. The complete theory then requires the proof of convergence and the explicit calculation of the approximate functionals. For the limiting case of single time functionals, being ordinary functions in the oscillator model both problems have been discussed [7, 10, 12–16]. For the general time ordered functionals only the second problem has been investigated in preceding papers [8, 9]. In this paper now we attack the convergence problem. As is well known from functional analysis a necessary condition for convergence is the

[1] Y. V. NOVOZHILOV and A. V. TULUB, The Method of Functionals in the Quantum Theory of Fields, Gordon and Breach, New York 1961.
[2] W. T. MARTIN and I. SEGAL, Analysis in function space, M.I.T. Press 1963.
[3] E. A. BEREZIN, The Method of Second Quantization, Academic Press, Ney York, London 1966.
[4] W. HEISENBERG, An Introduction to the Unified Theory of Elementary Particles, Wiley and Sons, London 1967.
[5] H. RAMPACHER, H. STUMPF, and F. WAGNER, Fortschritte der Physik **13**, 385 [1965].
[6] H. P. DÜRR and F. WAGNER, Nuovo Cim. X, **46**, 223 [1966].
[7] D. MAISON and H. STUMPF, Z. Naturforsch. **21 a**, 1829 [1966]; in the following denoted with I.
[8] W. SCHULER and H. STUMPF, Z. Naturforsch. **22 a**, 1842 [1967]; in the following denoted with II.
[9] W. SCHULER and H. STUMPF, Z. Naturforsch. **23 a**, 902 [1968]; in the following denoted with III.
[10] D. MAISON, Thesis, University of Munich 1967.
[11] W. SCHULER, Z. Naturforsch. **24 a** [1969], in prep.
[12] W. HEISENBERG, Nachrichten Göttinger Akad. Wiss. **1953**, 111.
[13] H. J. KAISER, Ann. d. Phys. **6**, 131 [1960].
[14] H. STUMPF, F. WAGNER, and F. WAHL, Z. Naturforsch. **19 a**, 1254 [1964].
[15] CH. SCHWARTZ, Ann. Physics **32**, 277 [1965].
[16] F. WAGNER, Thesis, University of Munich 1966.